Rezumatul tezei de abilitare

Elliptic Problems on Fractals: Backgrounds and Related Topics

de Brigitte E. Breckner

Geneza acestei teze este strâns legată de dezvoltarea domeniilor mele de cercetare din ultimii 10 ani. Pentru a prezenta această dezvoltare, mă voi referi pe scurt la teza mea de doctorat. Am elaborat-o în perioada 1995–1998 la Universitatea Tehnică din Darmstadt (Germania) sub îndrumarea prof. dr. Karl H. Hofmann într-un domeniu foarte specializat, care include teoria Lie a grupurilor şi semigrupurilor precum şi semigrupurile topologice. Pentru a rezolva câteva probleme rămase deschise în teză, am iniţiat împreună cu prof. dr. Wolfgang A.F. Ruppert (University of Life Sciences din Viena) un proiect comun de cercetare axat pe studiul proprietăţilor nelocale ale subsemigrupurilor grupurilor Lie. Rezultatele obţinute în cadrul acestui proiect (derulat pe parcursul a aproximativ 7 ani) şi publicate în lucrările menţionate în introducerea tezei de abilitare au adus, pe de o parte, contribuţii interesante în acest domeniu, iar, pe de altă parte, au soluţionat problemele rămase deschise în teza de doctorat. La scurt timp după finalizarea proiectului cu prof. W.A.F. Ruppert, am fost întrebată de către prof. dr. Varga Csaba, un coleg de-al meu de la Universitatea Babeş-Bolyai, dacă nu doresc sa mă alătur grupului de cercetare condus de el. Am acceptat această provocare, întrucât ea implica lărgirea domeniilor mele de cercetare prin includerea şi a altor aspecte funcţional analitice şi topologice decât cele tratate până atunci. Mai exact, a fost nevoie să mă familiarizez cu subiecte ce ţin de analiza nenetedă şi de analiza funcţională aplicată. Am început să mă ocup de studiul diferitelor probleme neliniare (în special de inegalităţi hemivariaţionale şi de incluziuni diferenţiale), în care sunt implicate funcţii local Lipschitz (aşadar funcţii ce nu sunt neapărat netede), cu ajutorul unor metode variaţionale şi a teoriei punctului critic. Rezultatele generale obţinute în lucrările [2] şi [5] legate de existenţa soluţiilor multiple ale unor sisteme de inegalităţi hemivariaţionale se pot aplica, în cazul diferenţiabil, la sisteme de tip gradient definite pe domenii nemărginite din $\mathbb{R}^n$ şi în care intervine p-Laplacianul. Alte aplicaţii ale rezultatelor noastre cu privire la inegalităţi hemivariaţionale vizează sisteme de tip Schrödinger, respectiv principiul simetriei critice aplicat acţiunii unui grup Lie compact pe anumite spaţii Sobolev. În lucrarea [2] am generalizat într-un mod original (considerând o normă omogenizată de tip Minkowski pe produsul a două spaţii Banach) rezultatele din [5]. Într-o lucrare următoare ce tratează aceste subiecte ([6]) am folosit versiunea nenetedă a unui principiu variaţional al lui B. Ricceri pentru a demonstra existenţa unui număr infinit de soluţii ale unor sisteme de incluziuni diferenţiale.

Continuând aceste cercetări, Varga Csaba mi-a atras într-o bună zi atenţia asupra lucrării lui K.J. Falconer [11], întrebându-mă dacă nu se pot aplica teoreme abstracte de punct critic de tip Ricceri la studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale (EDP) definite pe fractali. Prima mea reacţie la auzul acestei întrebări a fost de uimire, întrucât nu îmi puteam imagina că s-ar putea defini EDP pe nişte mulţimi atât de nenetede cum sunt fractalii. Căutând însă în literatura de specialitate, am descoperit că domeniul *analizei matematice pe fractali*, incluzând şi EDP pe fractali, a apărut, de fapt, în ultimii 30 de ani şi că el este în continuă dezvoltare. Mai exact, în ultimele trei decenii ale secolului 20 a început să devină din ce în ce mai evident faptul că multe fenomene din lumea reală sunt cel mai bine modelate cu ajutorul unor structuri geometrice cu aspect neneted, de exemplu cu ajutorul fractalilor. Se poate considera că originea domeniului *analizei matematice pe fractali* se află în cartea lui B.B. Mandelbrot [15], în care fractalii sunt propuşi ca modele pentru diferite fenomene din fizică. Ulterior, au fost dezvoltate de-a lungul anilor instrumente adecvate care să permită studiul acestor modele, adică a ecuaţiilor diferenţiale şi a EDP pe fractali. Una dintre principalele dificultăţi în studiul EDP pe fractali îl constituie definirea unor operatori diferenţiali, de exemplu, a Laplacianului[1]. A defini Laplacianul pe fractali presupune a depăşi anumite dificultăţi ce provin, în principal, din faptul că nu există noţiunea de derivată generalizată pentru funcţii definite pe fractali. De-a lungul anilor au fost elaborate definiţii ale Laplacianului, adecvate pentru diferite tipuri de fractali. De exemplu, teoria elaborată de J. Kigami se poate aplica aşa-numiţilor fractali *post-critically-finite* (fractali p.c.f.), iar cea a lui U. Mosco fractalilor *variaţionali*.

Odată ce Laplacianul a fost definit, au început să fie studiate probleme eliptice (liniare şi neliniare) pe fractali. În ultimii 20 de ani au fost aduse foarte multe contribuţii în acest domeniu (a se vedea referinţele bibliografice amintite în introducerea tezei de abilitare).

Aşa cum a fost menţionat anterior, primul meu contact cu EDP pe fractali a fost prin intermediul lucrării [11]. Studiind această lucrare, s-a dovedit foarte repede că, pentru a înţelege fenomenele implicate în EDP pe fractali, este nevoie ca mai întâi să se lucreze pe un exemplu concret, pe care să se poată verifica teoria generală. Aceasta m-a condus la lucrările [12] şi [13], în care sunt tratate probleme eliptice pe fractalul numit *Sierpinski gasket*, numit în continuare fractalul Sierpinski. Acesta din urmă joacă un rol important în teoria fractalilor, pentru că este un exemplu tipic pentru un fractal p.c.f. Lucrările [12] şi [13] au influenţat în mod considerabil

[1]Este demn de menţionat faptul că Laplacianul pe fractali a apărut iniţial în fizică, în studiul efectelor de filtrare precum şi a diferitelor procese de transport (atât în domeniul mecanicii clasice, cât şi în cel al mecanicii cuantice). Ulterior, Laplacianul pe fractali a devenit subiectul unor intense cercetări matematice.

cercetările ulterioare în domeniul EDP pe fractalul Sierpinski, întrucât ele propun o abordare care se pretează foarte bine la aplicarea metodelor variaţionale. În ceea ce priveşte ingredientele de bază necesare definirii problemelor eliptice, lucrările [12] şi [13] se bazează pe construcţia lui Kigami menţionată anterior (adică cea care se aplică fractalilor p.c.f.). Având definiţia Laplacianului pe intervalul $[0, 1]$ drept model, Kigami a introdus în [14] noţiunea de Laplacian pe fractalul Sierpinski din $\mathbb{R}^n$. Aşa cum este menţionat şi în teză, lucrările [12] şi [13] nu utilizează în mod direct Laplacianul introdus de Kigami, ci un alt operator, a cărui construcţie se bazează însă pe noţiuni introduse în lucrarea [14]. Pornind de la ideile dezvoltate în lucrarea [14], în [16] se propune o altă abordare pentru a introduce noţiunile fundamentale, mai exact *funcţiile armonice* şi o anumită formă de energie, necesare definirii problemelor eliptice pe fractalul Sierpinski. Aşa cum reiese din [16], aceste noţiuni sunt o consecinţă firească a *procedeului prelungirii armonice*, procedeu care este fundamental pentru a introduce acel spaţiu de funcţii pe fractalul Sierpinski care corespunde spaţiilor Sobolev în cazul domeniilor deschise din $\mathbb{R}^n$.

După această scurtă introducere în tematica tratată în această teză, voi prezenta în continuare conţinutul ei. Capitolul 1 este dedicat unei prezentări de ansamblu a tezei precum şi a modului în care am ajuns să ne ocupăm de probleme eliptice pe fractali.

În Capitolul 2 sunt introduse conceptele de bază necesare studiului problemelor eliptice pe fractalul Sierpinski. În Secţiunea 2.1, după ce se reaminteşte mai întâi definiţia fractalului Sierpinski în $\mathbb{R}^n$ (notat în continuare SG) ca fiind punctul fix al unei anumite funcţii definite pe $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, se stabilesc câteva proprietăţi de bază ale sale, care sunt consecinţe ale definiţiei şi care vor fi utilizate în continuare[2]. Secţiunea 2.2 este consacrată prezentării atât a procedeului prelungirii armonice, cât şi a unor consecinţe ale acestuia. În timp ce în Secţiunea 1.3 din [16] procedeul prelungirii armonice este descris doar pentru fractalul Sierpinski din $\mathbb{R}$ (adică pentru intervalul $[0, 1]$) şi pentru fractalul Sierpinski din $\mathbb{R}^2$ (adică pentru triunghiul lui Sierpinski), Teorema 2.2.3 din teză (şi care provine din lucrarea [1]) este adevărată pentru SG în orice spaţiu $\mathbb{R}^n$ (n fiind un număr natural nenul). Procedeul prelungirii armonice conduce în mod natural la o formă de energie W pe spaţiul funcţiilor reale definite pe o submulţime densă a SG, precum şi la funcţii armonice de nivel m, pentru fiecare $m \in \mathbb{N}$. Principalul rezultat al Secţiunii 2.3 îl constituie Teorema 2.3.4, în care se

[2] *Auto-similaritatea* fractalului Sierpinski (exprimată în descompunerea sa în celule de nivel m, pentru fiecare $m \in \mathbb{N}$), adică faptul că proprietăţile fractalului se regăsesc în fiecare dintre celulele sale este, în opinia mea, principala însuşire care compensează lipsa structurii netede a SG. Această auto-similaritate (ce poate fi descrisă şi ca un fel de simetrie) permite dezvoltarea teoriei EDP pe SG, întrucât stă la baza definirii tuturor conceptelor necesare pentru această teorie.

arată continuitatea de tip Hölder a funcţiilor de energie finită. Cu toate că exponentul care intervine în condiţia Hölder este amintit spre exemplu în [12], nu am găsit în literatura de specialitate o demonstraţie a acestui fapt în spaţii euclidiene de dimensiune $n \geq 3$. În schimb, Teorema 2.3.4 este adevărată în orice spaţiu de dimensiune finită nenulă. Continuitatea de tip Hölder a funcţiilor de energie finită permite prelungirea continuă a acestora la întregul SG. Notând cu $V := SG$, în Secţiunea 2.4 este introdus spaţiul $H_0^1(V)$ de funcţii reale pe SG, care constituie analogul în cazul fractal al unui spaţiu Sobolev. Sunt demonstrate cele mai importante proprietăţi ale spaţiului $H_0^1(V)$ (generalizând rezultatele corespunzătoare stabilite în [16] pentru dimensiunile 1 şi 2), anume că, înzestrat cu produsul scalar care generează forma de energie W, spaţiul $H_0^1(V)$ devine un spaţiu Hilbert real care poate fi scufundat compact în spaţiul funcţiilor reale continue definite pe SG, înzestrat cu norma supremum. Această scufundare compactă (care este o consecinţă a continuităţii de tip Hölder stabilită în Sectiunea 2.3) este, de fapt, cheia de bază care permite aplicarea metodelor variaţionale la studiul problemelor eliptice pe SG. Cu toate că spaţiul $H^1(V)$ nu este utilizat în restul lucrării, am inclus în Secţiunea 2.4 şi proprietăţile de bază ale acestuia, pentru că el va fi important pentru cercetări ulterioare (de exemplu, el va interveni în studiul problemelor Neumann pe SG). În Secţiunea 2.5 se introduce spaţiul Lebesgue $L^2(V, \mu)$, care este în mod natural asociat cu fractalul Sierpinski din $\mathbb{R}^n$, pentru că μ este măsura Hausdorff (normalizată) $\frac{\ln(n+1)}{\ln 2}$-dimensională pe SG. (Menţionăm că $\frac{\ln(n+1)}{\ln 2}$ este dimensiunea Hausdorff a fractalului Sierpinski din $\mathbb{R}^n$.) De asemenea, este de remarcat faptul că nu este neapărat necesar să se lucreze cu această măsură particulară pe SG. Tot ceea ce urmează (incluzând şi aplicaţiile din Capitolul 3) rămâne valabil în cazul oricărei măsuri pe SG care satisface condiţiile din Propoziţia 2.5.1. Fiecare astfel de măsură va induce (aşa cum este descris în Secţiunea 2.6) un Laplacian. În Secţiunea 2.6 este definit *Laplacianul slab* [3]. Avantajul Laplacianului slab constă în faptul că el poate fi definit cu ajutorul unor metode ale analizei funcţionale. În Secţiunea 2.6 este prezentat cadrul general care stă la baza definirii acestui operator[4].

Capitolul 3 este dedicat studiului problemelor eliptice pe SG. Rezultatele generale stabilite la începutul Secţiunii 3.1 scot în evidenţă faptul că scufundarea compactă a spaţiului $H_0^1(V)$ în spaţiul funcţiilor continue definite pe SG conduce la secvenţial semicontinuitatea inferioară (în topologia slabă) a funcţionalelor de energie ataşate problemelor eliptice pe SG (o proprietate ce este esenţială pentru a

[3] Adjectivul *slab* a fost introdus în [12] şi [13] pentru a distinge acest operator de Laplacianul construit de Kigami în [14].

[4] Ne aşteptăm ca acest cadru general să furnizeze Laplacianul slab în cazul oricărui fractal p.c.f.

stabili existenţa soluţiilor acestor probleme cu ajutorul unor metode variaţionale). În Secţiunea 3.2 sunt introduse atât problemele eliptice pe SG cu condiţii Dirichlet zero la frontieră precum şi noţiunea de soluţie slabă a acestor probleme. În Secţiunile următoare 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 şi 3.7, bazate pe lucrările [3], [4], [7]–[10], sunt studiate diferite probleme eliptice pe SG. Aşa cum este evidenţiat în introducerea tezei, metodele utilizate de noi diferă de cele folosite de alţi autori pentru a studia probleme eliptice pe fractali. Astfel, în Secţiunea 3.3 utilizăm o metodă introdusă de J. Saint Raymond pentru a arăta existenţa unui număr infinit de soluţii slabe ale unor probleme Dirichlet pe SG. Secţiunile 3.4–3.6 tratează probleme Dirichlet pe SG ce depind de parametri. Demersul nostru pentru a dovedi existenţa unui număr finit de soluţii slabe ale unor probleme Dirichlet pe SG care depind de unul, doi sau trei parametri se bazează în principal pe nişte teoreme abstracte de multiplicitate, mai exact pe teoreme de punct critic stabilite recent de către B. Ricceri. În Secţiunea 3.7 este folosit tot un asemenea rezultat stabilit de către B. Ricceri pentru a studia sisteme de tip gradient pe SG, depinzând de un parametru. Din câte ştiu, Teorema 3.4.2 şi Teorema 3.7.7 reprezintă primele aplicaţii în cazul EDP pe fractali, resp. în cazul sistemelor eliptice pe fractali, ale unor teoreme de tip Ricceri, care asigură existenţa unui număr finit de puncte critice. (Menţionăm că în literatura de specialitate există numeroase aplicaţii ale acestor teoreme la studiul problemelor neliniare definite pe domenii deschise din $\mathbb{R}^n$.)

Aplicarea, în cadrul tezei, a tuturor acestor tehnici variate la studiul problemelor eliptice pe SG evidenţiază faptul că metode consacrate pentru a studia existenţa şi multiplicitatea soluţiilor EDP definite pe domenii deschise din $\mathbb{R}^n$ pot fi utilizate cu succes şi în cazul EDP pe fractali. Pentru aceasta este însă nevoie ca aceste metode să fie adaptate fractalilor, ceea ce (aşa cum reiese în special din rezultatele principale ale Secţiunilor 3.6 şi 3.7) se poate realiza aplicând Lema lui Urîson şi utilizând anumite proprietăţi ale spaţiului de tip Sobolev $H_0^1(V)$ în care se caută în acest caz soluţiile (slabe) ale problemelor studiate.

În Capitolul 4 sunt prezentate câteva teme de cercetare, care au apărut în mod natural în timpul studiului problemelor eliptice pe SG. Aşa cum reiese din teză, unele dintre aceste teme constituie deja subiectul unor cercetări, altele vor fi tratate în viitor.

Tratând probleme eliptice neliniare pe un fractal, rezultatele acestei teze completează şi complementează teoria problemelor eliptice neliniare definite pe domenii deschise din $\mathbb{R}^n$. De asemenea, a ne familiariza şi a înţelege fenomenele care apar în cazul EDP pe SG, este primul pas pentru a studia aceste probleme în cazul general al fractalilor p.c.f.

În încheiere amintim doar referinţele bibliografice menţionate pe parcursul acestui rezumat. (Lista completă a referinţelor bibliografice poate fi consultată la sfârşitul tezei.)

Bibliografie

[1] Breckner, B.E.: *Real-valued functions of finite energy on the Sierpinski gasket.* Mathematica **78** no. 2, 142–158 (2013)

[2] Breckner, B.E., Horvath, A., Varga, Cs.: *A multiplicity result for a special class of gradient-type systems with non-differentiable term.* Nonlinear Anal. **70**, 606–620 (2009)

[3] Breckner, B.E., Rădulescu, V., Varga, Cs.: *Infinitely many solutions for the Dirichlet problem on the Sierpinski gask*et. Anal. Appl. (Singap.) **9**, 235–248 (2011)

[4] Breckner, B.E., Repovš, D., Varga, Cs.: *On the existence of three solutions for the Dirichlet problem on the Sierpinski gasket.* Nonlinear Anal. **73**, 2980–2990 (2010)

[5] Breckner, B.E., Varga, Cs.: *A multiplicity result for gradient-type systems with non-differentiable term.* Acta Math. Hungar. **118** (1-2), 85–104 (2008)

[6] Breckner, B.E., Varga, Cs.: *Infinitely many solutions for a class of systems of differential inclusions.* Proc. Edinburgh Math. Soc. **54**, 9–23 (2011)

[7] Breckner, B.E., Varga, Cs.: *One-parameter Dirichlet problems on the Sierpinski gasket.* Appl. Math. Comput. **219**, 1813–1820 (2012)

[8] Breckner, B.E., Varga, Cs.: *Multiple solutions of Dirichlet problems on the Sierpinski gasket.* To apper in J. Optim. Theory Appl. DOI 10.1007/s10957-013-0368-7

[9] Breckner, B.E., Varga, Cs.: *A note on elliptic problems on the Sierpinski gasket.* Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. **59** no. 4, 469–477 (2014)

[10] Breckner, B.E., Varga, Cs.: *A note on gradient-type systems on fractals.* Nonlinear Anal. Real World Appl. **21**, 142–152 (2015)

[11] Falconer, K.J.: *Semilinear PDEs on self-similar fractals.* Commun. Math. Phys. **206**, 235–245 (1999)

[12] Falconer, K.J., Hu, J.: *Non-linear elliptical equations on the Sierpinski gasket*. J. Math. Anal. Appl. **240**, 552–573 (1999)

[13] Hu, C.: *Multiple solutions for a class of nonlinear elliptic equations on the Sierpinski gasket*. Sci. China Ser. A **47** no. 5, 772–786 (2004)

[14] Kigami, J.: *A harmonic calculus on the Sierpinski spaces*. Japan J. Appl. Math. **6**, 259–290 (1989)

[15] Mandelbrot, B.B.: *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, New York (1977)

[16] Strichartz, R.S.: *Differential Equations on Fractals. A Tutorial*. Princeton University Press, Princeton, NJ (2006)